Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Inhalt

Übersicht:

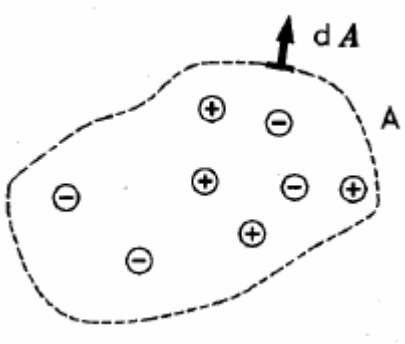
- Herleitung Doppelintegrale: Riemann Summen
- Integration über Normalbereiche
- Dreifachintegrale (Volumenintegrale)

Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Anwendungsbeispiel aus GET 1

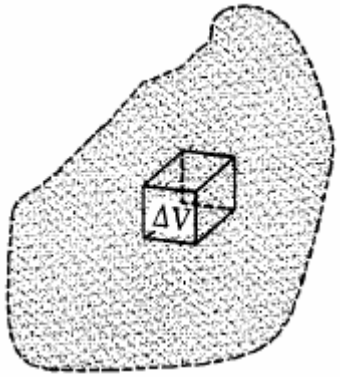
Wir betrachten eine (diskrete) Ladungsverteilung, die aus endlich vielen Einzelladungen besteht…



Quelle: GET-Skript, Prof. Kern

Wir sind an der Gesamtladung interessiert und summieren…

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$



Quelle: GET-Skript, Prof. Kern

Was passiert, wenn eine Raumladung vorliegt, d.h. die Ladungen als kontinuierliche Dichte im Volumen verteilt sind?

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \, \Delta V_i = \int_V \rho \cdot dV$$

Aus der unendlichen Summe von infinitesimalen Volumina wird ein Dreifachintegral (Volumenintegral)

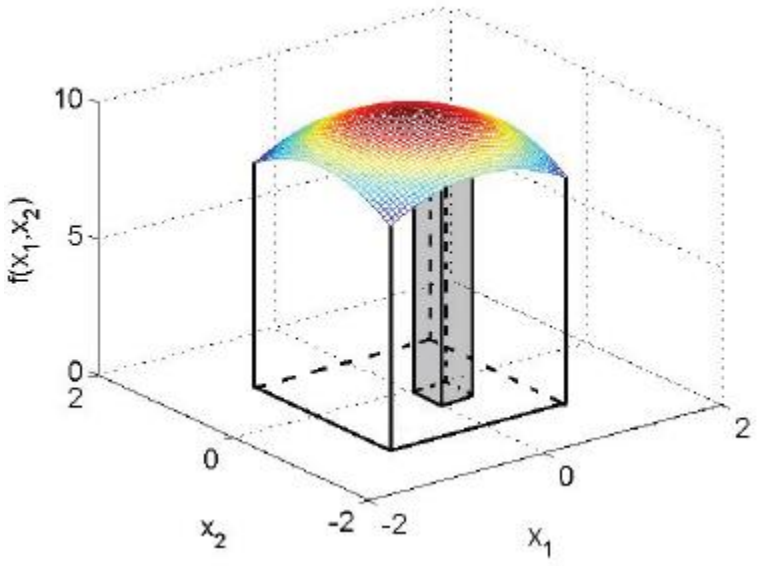
Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Herleitung am Beispiel...

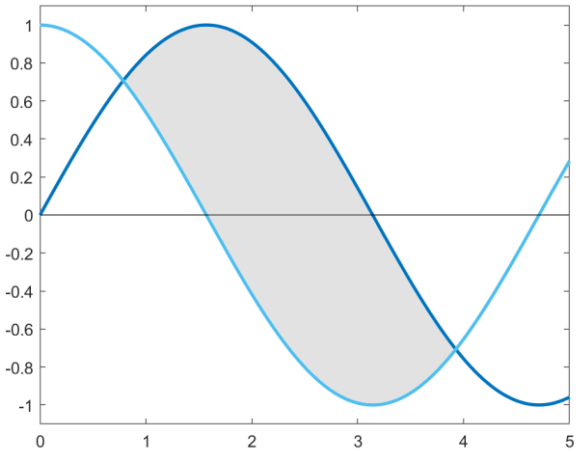
Wir betrachten das Skalarfeld…

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$



Wir suchen das Volumen unter dem Funktionsgraphen im Bereich…

$$-1 \leq x_1, x_2 \leq 1 \qquad (x_1, x_2) \in [-1,1]^2$$



Bemerkung:

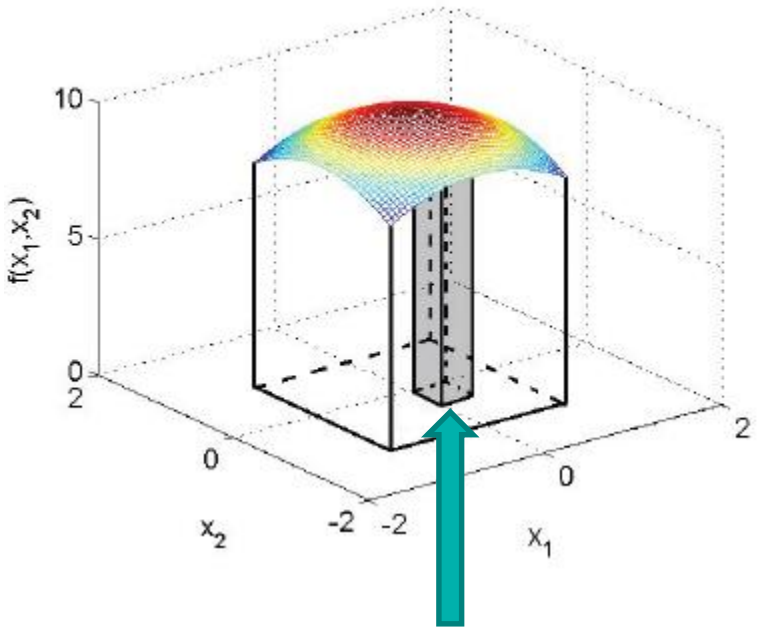
In 1D haben wir mit dem Integral die Fläche unter der Kurve berechnet, das geht bei einem 2D Skalarfeld in das Volumen unter der Fläche über…

Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Herleitung am Beispiel…

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$



Als Grundidee versuchen wir die Riemann Summen aus 1D zu übertragen…

Wir betrachten „Säulen" mit rechteckiger Grundfläche $\Delta A = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2$…

$$\Delta A = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2$$

Der obere Teil des Volumens wird durch den Funktionsgraphen bestimmt…

Sind Δx_1 und Δx_2 klein, so ändert sich der Funktionswert der Säule kaum, wir approximieren …

$$f(x_1, x_2) \approx f(\xi_1, \xi_2)$$

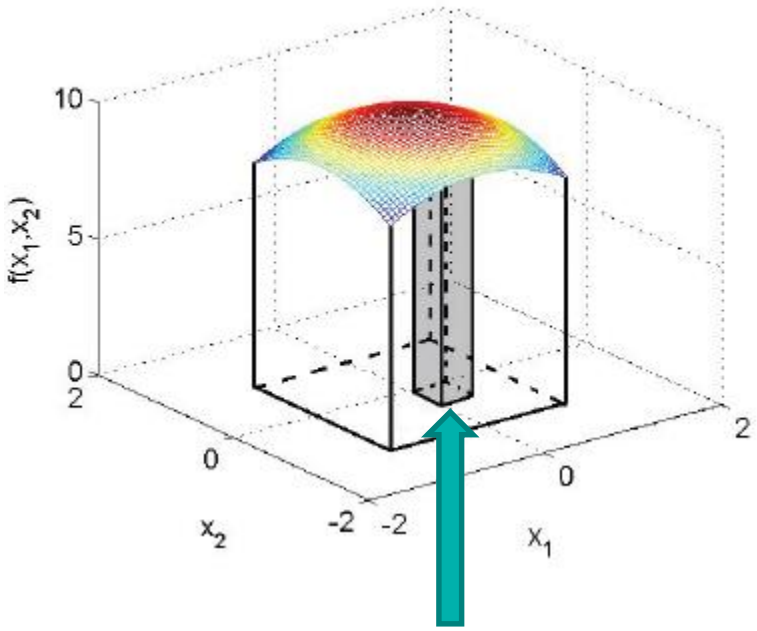
(ξ_1, ξ_2) ist ein beliebiger Punkt in ΔA (analog zur Zwischenstelle)…

Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Herleitung am Beispiel…

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$



Grunddaten der Säule…

Grundfläche: $\Delta A = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2$

Höhe: $f(x_1, x_2) \approx f(\xi_1, \xi_2)$

Hieraus ergibt sich folgendes Volumen für die Säule…

$$\Delta A = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2$$

$$V_S \approx f(\xi_1, \xi_2) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 = f(\xi_1, \xi_2) \cdot \Delta A$$

Das Gesamtvolumen ergibt sich aus Summation der einzelnen Säulen…

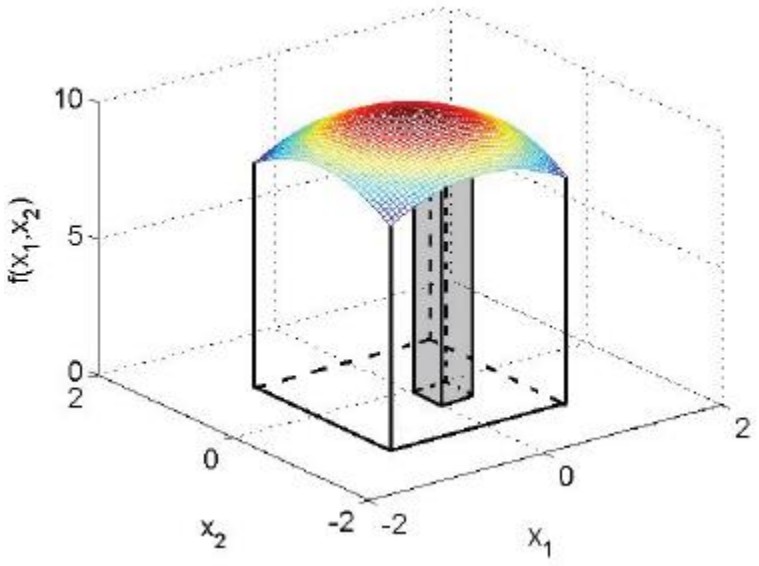
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}\right) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}\right) \cdot \Delta A$$

Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Herleitung am Beispiel…

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$



Summe für das Gesamtvolumen…

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}\right) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2$$

Riemann Summe in 2D

Wir bilden den Grenzwert: $\Delta A \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x_1 \to 0$ und $\Delta x_2 \to 0$

Dann geht die Summe in ein Doppelintegral über…

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}\right) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \quad \Rightarrow \quad V = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

Notationen

Es gibt verschiedene Notationen…

Wir integrieren über die Fläche A und schreiben das Doppelintegral wie folgt…

$$\iint_A f(x_1, x_2)\ dx_1\, dx_2 = \iint_A f(x_1, x_2)\ dA$$

Integrationsbereich

Flächenelement

Integralrechnung

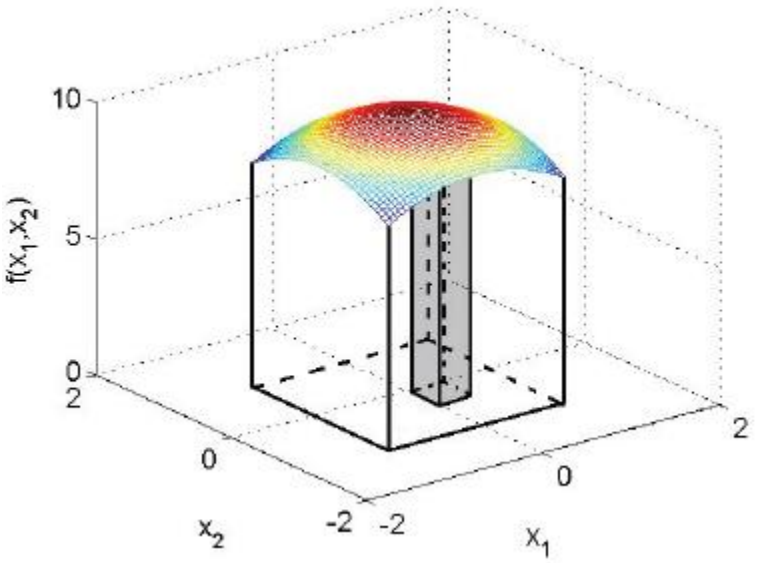
Mehrfachintegrale

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Berechnen Sie das gesuchte Volumen, indem Sie das Doppelintegral ausrechnen…

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} -x_1^2 - x_2^2 + 10 \, dx_1 \, dx_2$$

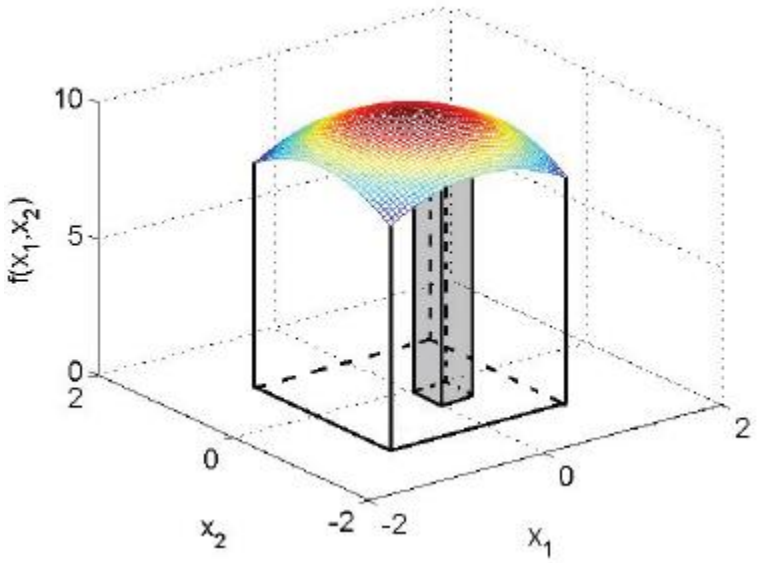
$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$



Jetzt sind Sie an der Reihe…

Berechnen Sie das gesuchte Volumen, indem Sie das Doppelintegral ausrechnen…

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$



$$V = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -x_1^2 - x_2^2 + 10 \, dx_1 \, dx_2$$

$$= \int_{-1}^{1} -\frac{3}{2} - 2x_2^2 + 20 \, dx_2$$

$$= -\frac{3}{2}x_2 - \frac{2}{3}x_2^3 + 20x_2 \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{112}{3}$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

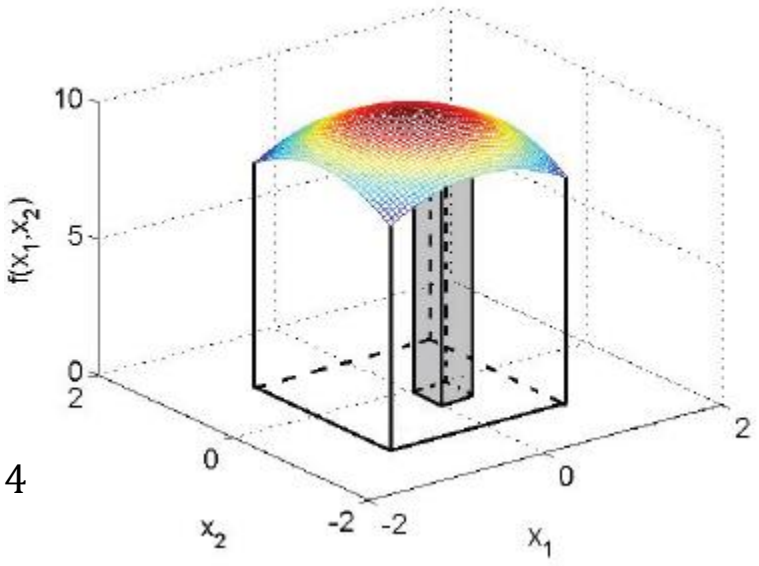
Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Beispiel

Zum Vergleich machen wir eine Überschlagsrechnung…

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$



Quadratische Grundfläche: $A = 2 \cdot 2 = 4$

Größter Funktionswert: $f(0,0) = 10$

$$V_{max} = 4 \cdot 10 = 40$$

Vergleich mit dem Integral…

Kleinster Funktionswert: $f(1,1) = 8$

$$V_{min} = 4 \cdot 8 = 32$$

$$V_{min} = 32 < 37.333 < 40 = V_{max}$$

Integration über Normalbereiche

Bisher haben wir über Rechteckgebiete integriert…

$$a \leq x_1 \leq b,\ c \leq x_2 \leq d \quad \Rightarrow \quad \int_c^d \int_a^b f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

Wie können wir über andere Flächen als Rechtecke integrieren?

⇒ Integration über Normalbereiche

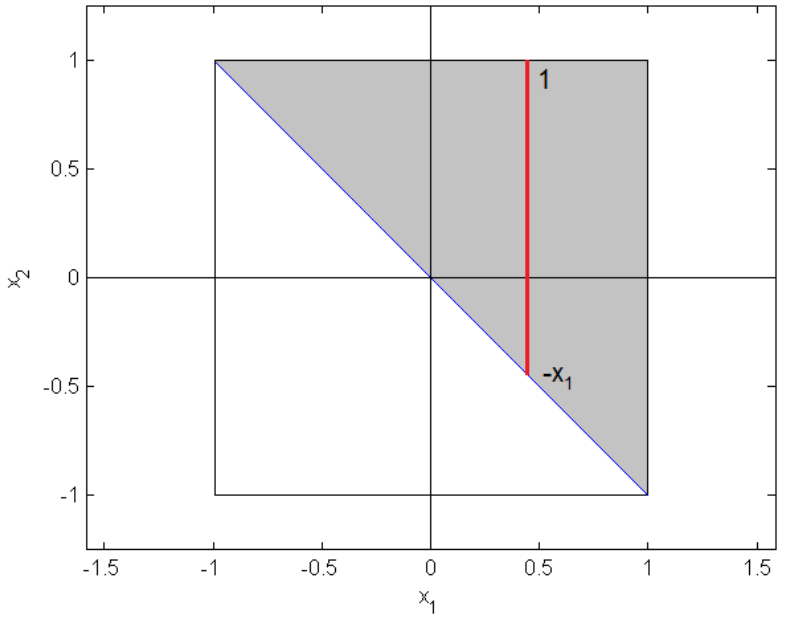
Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Beispiel

Wir integrieren wieder unser Skalarfeld, jetzt aber nur über das halbe Quadrat, d.h. über ein Dreieck…

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$



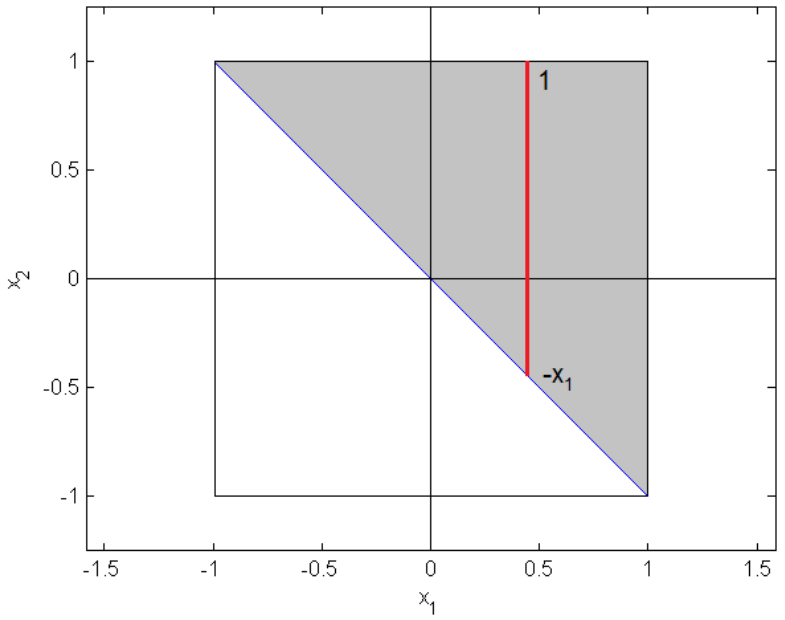
Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Beispiel

Wir integrieren wieder unser Skalarfeld, jetzt aber nur über das halbe Quadrat, d.h. über ein Dreieck…

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$



Wir erwarten aus Symmetriegründen das halbe Volumen: $V = \frac{56}{3}$

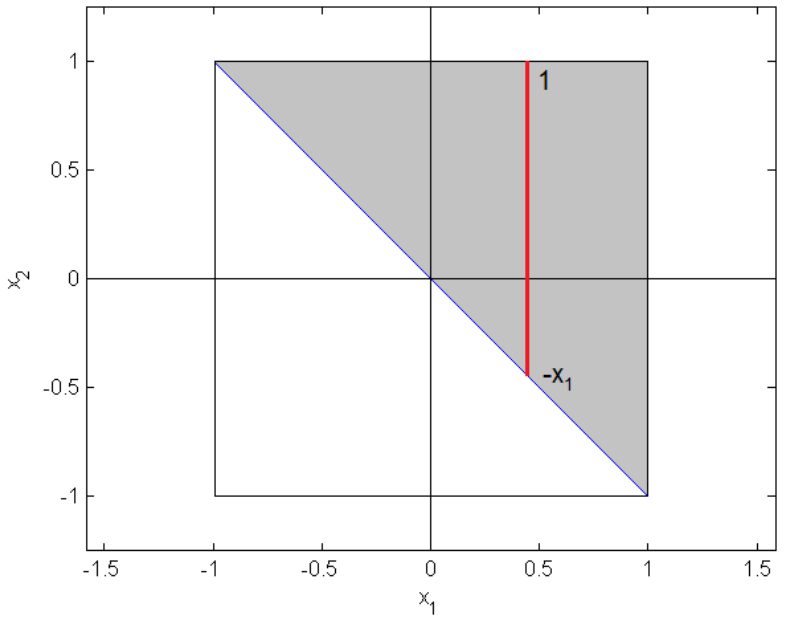
Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Beispiel

Wir integrieren wieder unser Skalarfeld, jetzt aber nur über das halbe Quadrat, d.h. über ein Dreieck…

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$



Wir erwarten aus Symmetriegründen das halbe Volumen: $V = \frac{56}{3}$

Was müssen wir an unserer Rechnung ändern?

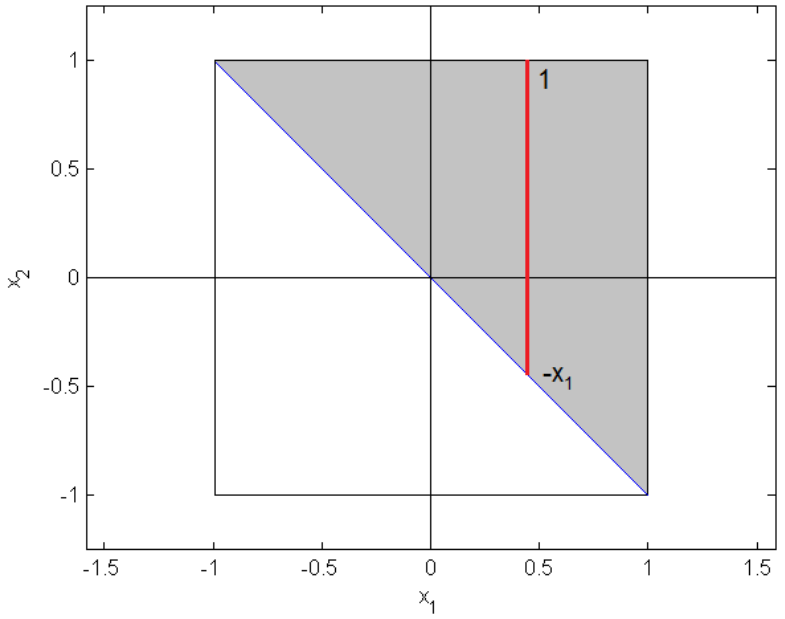
Neue Grenzen…

Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Beispiel

Wir passen die Grenzen an…

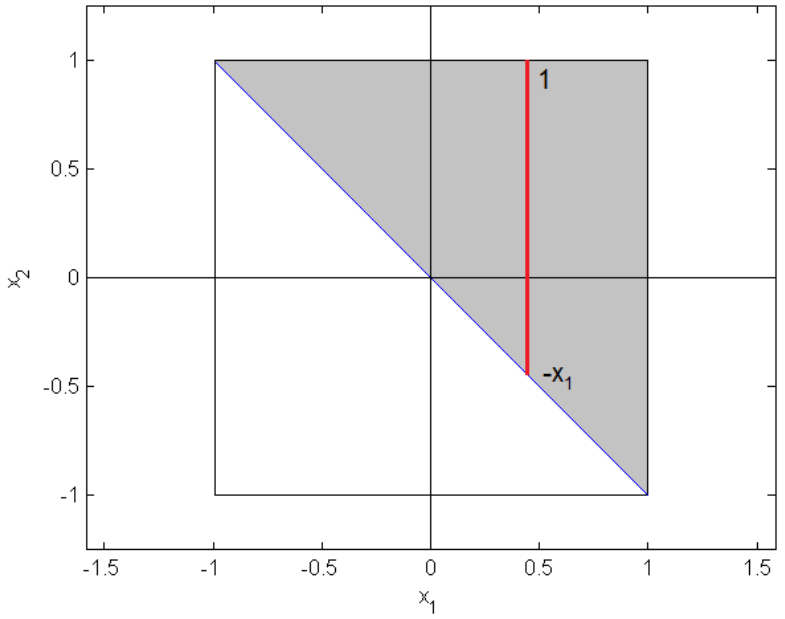


$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$

Beispiel

Wir passen die Grenzen an…

Wie in der Skizze gezeigt, halten wir x_1 fest und lassen x_2 im entsprechenden Bereich laufen.



$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$

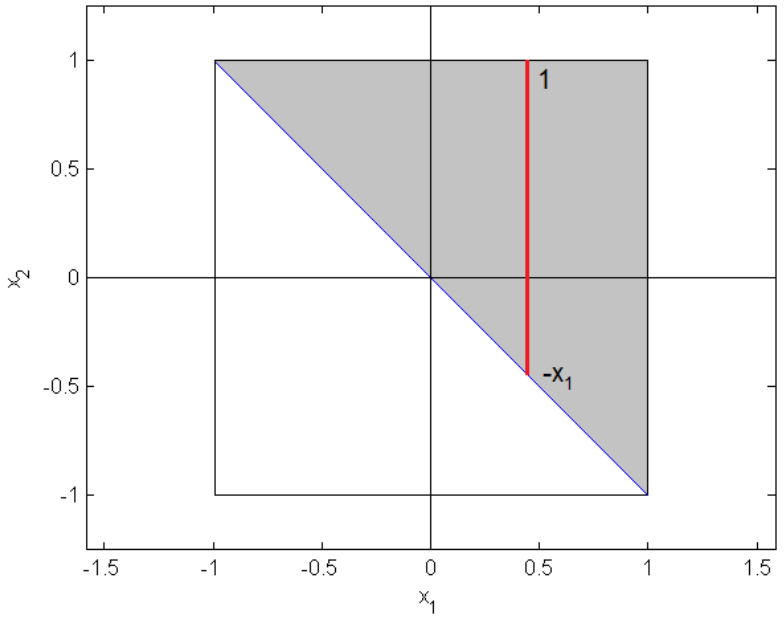
Beispiel

Wir passen die Grenzen an…

Wie in der Skizze gezeigt, halten wir x_1 fest und lassen x_2 im entsprechenden Bereich laufen.

Dieser Bereich hängt dann von x_1 ab…

$$-x_1 \leq x_2 \leq 1$$



$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$

Beispiel

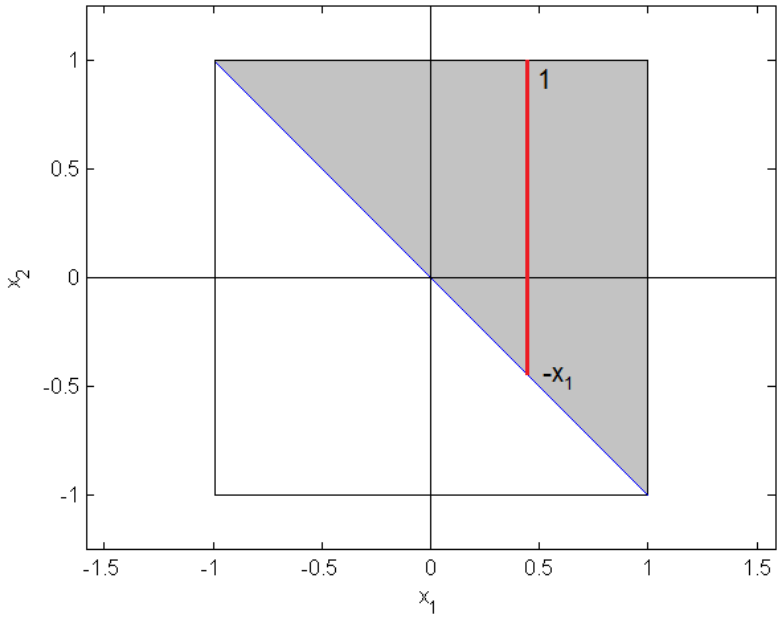
Wir passen die Grenzen an…

Wie in der Skizze gezeigt, halten wir x_1 fest und lassen x_2 im entsprechenden Bereich laufen.

Dieser Bereich hängt dann von x_1 ab…

$$-x_1 \leq x_2 \leq 1$$

Der Bereich für x_1 bleibt: $-1 \leq x_1 \leq 1$



$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$

$$\int_{-1}^{1} \int_{-x_1}^{1} -x_1^2 - x_2^2 + 10 \; dx_2 \; dx_1$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Beispiel

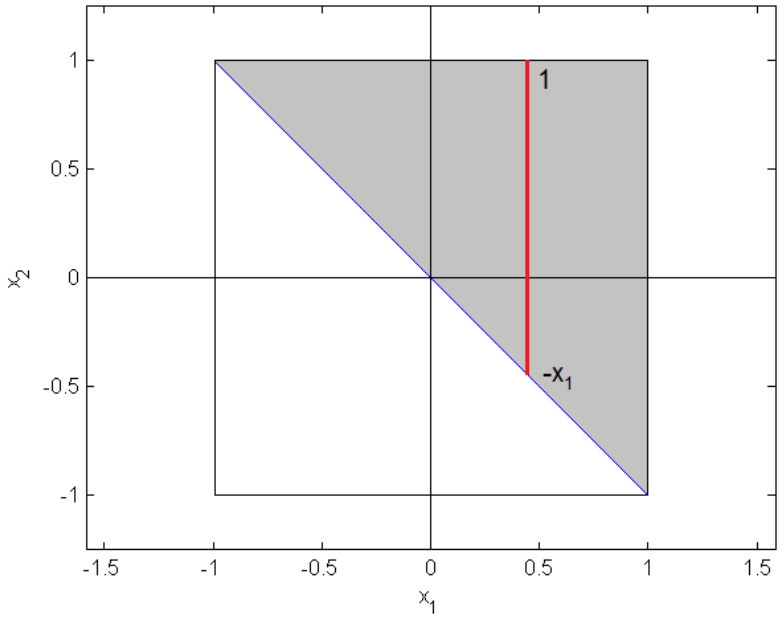
Wir rechnen das Integral aus…

$$\int_{-1}^{1}\int_{-x_1}^{1} -x_1^2 - x_2^2 + 10 \;\; dx_2 \;\; dx_1$$

$$= \int_{-1}^{1} -x_1^2 x_2 - \frac{1}{3}x_2^3 + 10x_2 \Big|_{-x_1}^{1} \; dx_1$$

$$= \int_{-1}^{1} -\frac{4}{3}x_1^3 - x_1^2 - 10x_1 - \frac{1}{3} + 10 dx_1$$

$$= \frac{56}{3}$$



$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$

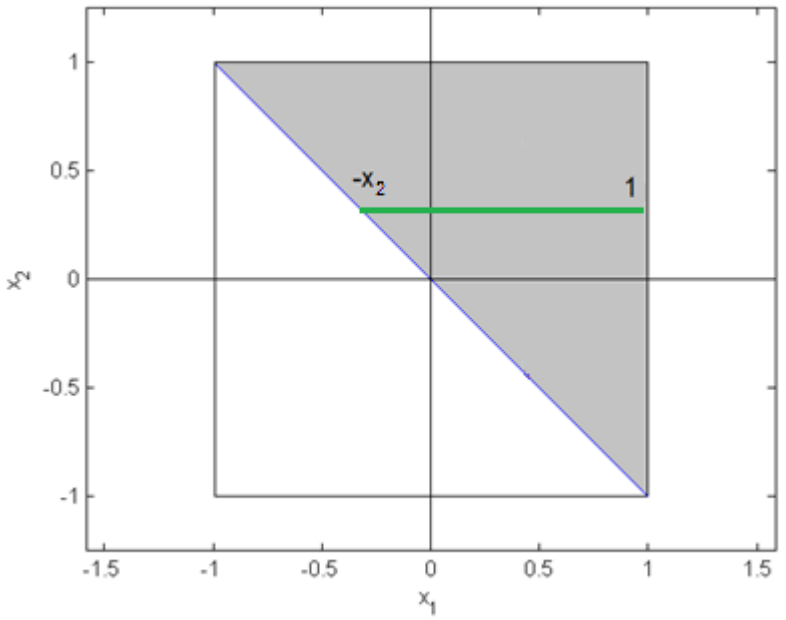
x_1 ist Grenze!

Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Beispiel

Wir betrachten eine Alternative…



$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$

Integralrechnung

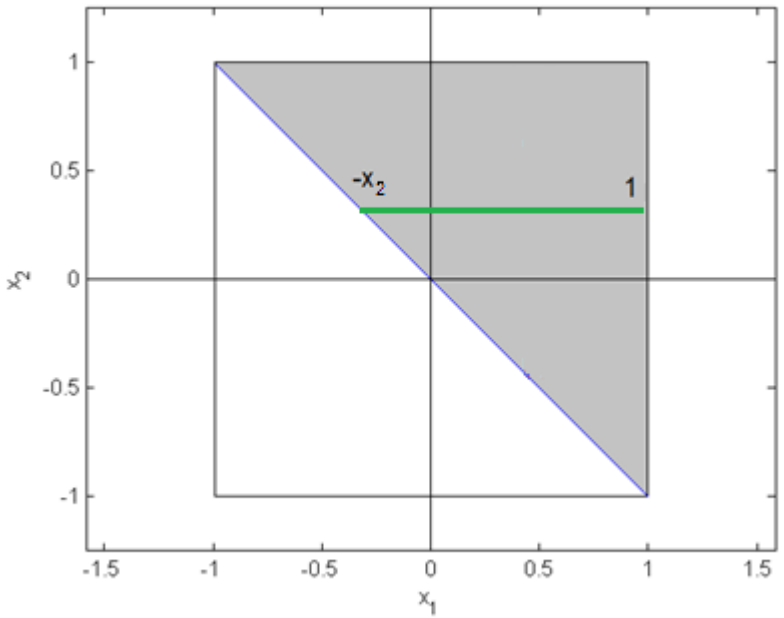
Mehrfachintegrale

Beispiel

Wir betrachten eine Alternative…

Jetzt ist x_2 fest und x_1 läuft…

$$-1 \leq x_2 \leq 1 \qquad -x_2 \leq x_1 \leq 1$$



$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 10$$

$$\int_{-1}^{1} \int_{-x_2}^{1} -x_1^2 - x_2^2 + 10 \; dx_1 \; dx_2$$

x_2 ist Grenze!

Achtung:

Da die Integrationsvariablen als Grenzen auftreten, können wir hier nicht die Integrationsreihenfolge vertauschen!

Mehrfachintegrale

Definition (Normalbereich):

Es seien g und h stetige Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Weiter gelte $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann heißen die Mengen

$$G_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x_1 \leq b, g(x_1) \leq x_2 \leq h(x_1)\}$$

$$G_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x_2 \leq b, g(x_2) \leq x_1 \leq h(x_2)\}$$

Normalbereiche im $\mathbb{R}^2$.

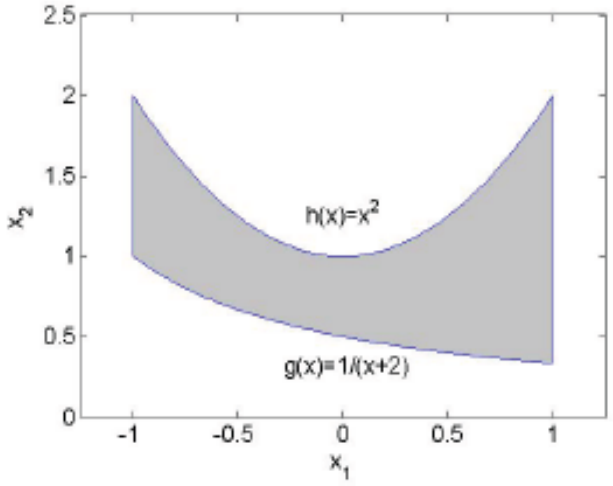
Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Beispiel

Wir wollen folgendes Skalarfeld über den Normalbereich integrieren…

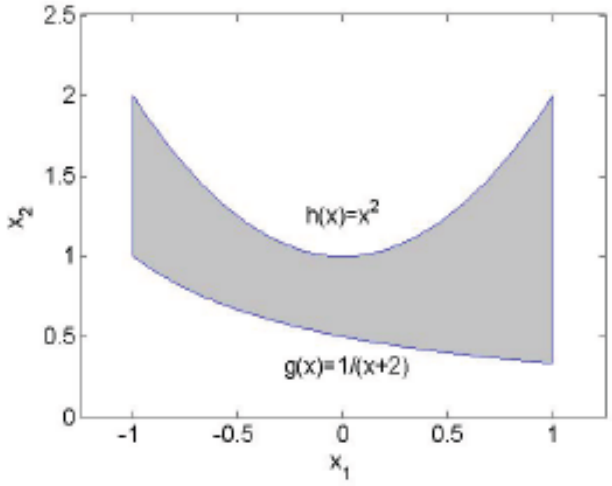
$$f(x_1, x_2) = x_1$$



Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Beispiel



Wir wollen folgendes Skalarfeld über den Normalbereich integrieren…

$$f(x_1, x_2) = x_1$$

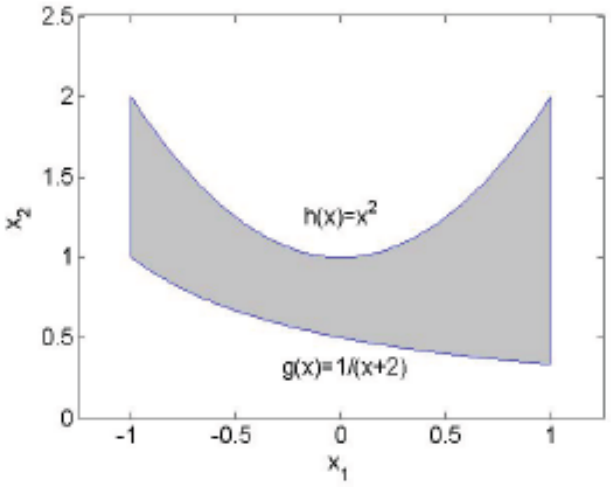
Der Normalbereich wird durch die folgenden Funktionen begrenzt…

$$g(x) = \frac{1}{x+2} \qquad h(x) = x^2$$

Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Beispiel



Wir wollen folgendes Skalarfeld über den Normalbereich integrieren…

$$f(x_1, x_2) = x_1$$

Der Normalbereich wird durch die folgenden Funktionen begrenzt…

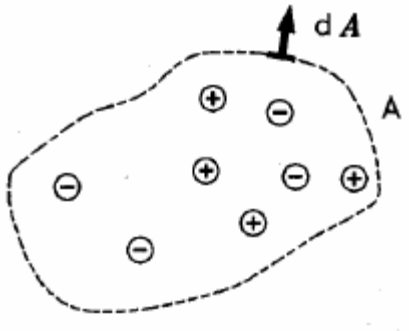
$$g(x) = \frac{1}{x+2} \qquad h(x) = x^2$$

Normalbereich: $$G_1 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1, \frac{1}{x_1+2} \leq x_2 \leq x_1^2\right\}$$

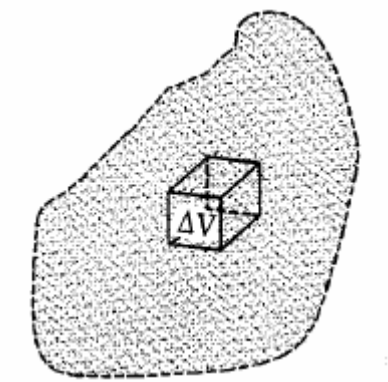
$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \int_{\frac{1}{x_1+2}}^{x_1^2} x_1 \; dx_2 \; dx_1 = \int_{-1}^{1} x_1^3 - \frac{x_1}{x_1+2} \; dx_1 = \cdots$$

Dreifachintegrale (Volumenintegrale)

Wir kommen zurück zu unserem Anfangsbeispiel…



Quelle: GET-Skript, Prof. Kern



Quelle: GET-Skript, Prof. Kern

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \, \Delta V_i = \int_V \rho \cdot dV$$

Volumenintegral

Beispiel

Wir wollen das 3D Skalarfeld über den Quader Q integrieren…

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \qquad Q: \quad 0 \le x_1 \le 1, \qquad 0 \le x_2 \le 2, \qquad 0 \le x_3 \le 3$$

Beispiel

Wir wollen das 3D Skalarfeld über den Quader Q integrieren…

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \qquad Q: \quad 0 \le x_1 \le 1, \qquad 0 \le x_2 \le 2, \qquad 0 \le x_3 \le 3$$

Wir zerlegen den großen Quader in viele kleine Quader… $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$

Beispiel

Wir wollen das 3D Skalarfeld über den Quader Q integrieren…

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \qquad Q: \quad 0 \le x_1 \le 1, \qquad 0 \le x_2 \le 2, \qquad 0 \le x_3 \le 3$$

Wir zerlegen den großen Quader in viele kleine Quader… $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$

In jedem ΔV ist f annähernd konstant, d.h. wir nehmen an…

$$f(x_1, x_2, x_3) \approx f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad \Rightarrow \quad f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cdot \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

Beispiel

Wir wollen das 3D Skalarfeld über den Quader Q integrieren…

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \qquad Q: \quad 0 \le x_1 \le 1, \qquad 0 \le x_2 \le 2, \qquad 0 \le x_3 \le 3$$

Wir zerlegen den großen Quader in viele kleine Quader… $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$

In jedem ΔV ist f annähernd konstant, d.h. wir nehmen an…

$$f(x_1, x_2, x_3) \approx f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad \Rightarrow \quad f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cdot \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

Die Summation über alle kleinen Quader führt wieder auf eine Riemann Summe…

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \xi_3^{(i)}\right) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3 \quad \Rightarrow \quad \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 f(x_1, x_2, x_3) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$$

Normalbereiche für Volumenintegrale

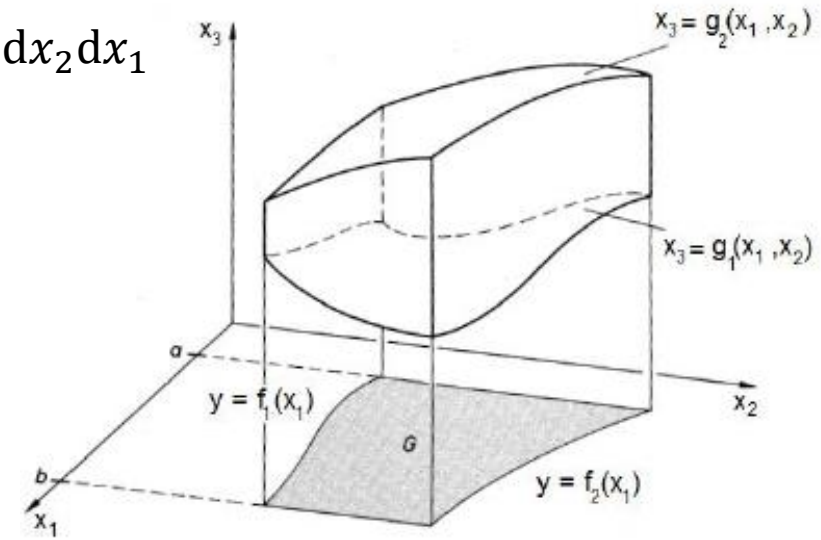
Wir können auch hier über Normalbereiche integrieren

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : a \le x_1 \le b, f_1(x_1) \le x_2 \le f_2(x_1), g_1(x_1, x_2) \le x_3 \le g_2(x_1, x_2)\}$$

$$\int_a^b \int_{f_1(x_1)}^{f_2(x_1)} \int_{g_1(x_1,x_2)}^{g_2(x_1,x_2)} f(x_1, x_2, x_3)\, \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_1$$

Achtung:

Auch hier darf nicht vertausch werden



Quelle: Papula

Integralrechnung

Mehrfachintegrale

Zusammenfassung

Mehrfachintegrale können analog zu einfachen Integralen hergeleitet und ausgerechnet werden.

Die Interpretation als Fläche unter der Kurve ist entsprechend, z.B. gibt das Doppelintegral das Volumen unter dem Funktionsgraphen (Fläche) an.

Normalbereiche

Bei der Integration über Normalbereiche hängen die Integrationsgrenzen i.d.R. von einzelnen Integrationsvariablen ab, sodass die Integrationsreihenfolge nicht vertauscht werden kann.

Normalbereiche sind nur in wenigen Ausnahmefällen praxistauglich. Für viele Integrationsgebiete ergeben sich komplizierte Integrale.



Ausnutzen von Symmetrien und speziellen Koordinaten

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Integrieren Sie das Skalarfeld $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ über den Normalbereich…

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq 1,\, x_1 \leq x_2 \leq 1,\, x_1 + x_2 \leq x_3 \leq 2\}$$